Gourdon, p 191
Rombaldi, p 752

Décomposition de Dunford et diagonalisabilité de l'exponentielle matricielle

Théorème [Décomposition de Dunford] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice de polynôme caractéristique χ_M scindé dans $\mathbb{K}$. Il existe alors un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec D diagonalisable et N nilpotente, tel que :

$$M = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND$$

On a :

$$\chi_M = \pm \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

$$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r \quad \text{avec pour } i \in [\![1, r]\!],\ N_i = \operatorname{Ker}(M - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$$

▷ Démontrons l'existence :

On pose pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et tout $x \in N_i$,

$$d(x) = \lambda_i x, \quad d_i := d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i} \quad \text{et} \quad n(x) = f(x) - \lambda_i x, \quad n_i := n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i}$$

On a alors :

d_i et n_i endomorphismes de N_i car N_i est stable par f donc par d et n

d est diagonalisable — d est diagonale

pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $n_i^{\alpha_i} = 0$ par définition, donc pour $\alpha = \max_{1 \leq i \leq r} \alpha_i$, $n^\alpha = 0$ sur chaque N_i donc sur E

De plus,

$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $d_i = \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i}$ donc $n_i \circ d_i = d_i \circ n_i$

Donc : d et n commutent sur chaque N_i donc sur E — $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$

▷ Démontrons l'unicité :

Soit (d', n') un autre couple satisfaisant les conditions.

On remarque que :

$f \circ d' = d' \circ f$ donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, N_i est stable par d'

$d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{Id}_{|N_i}$ donc d_i et $d'_{|N_i}$ commutent, alors d et d' commutent sur E

Donc d et d' sont codiagonalisables, ainsi $d - d'$ est diagonalisable.

Comme :

$n = f - d$, $n' = f - d'$ et $d \circ d' = d' \circ d$ alors $(n - n')^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$ — indices de nilpotence respectifs de n et n'

Donc :

$d - d' = n - n'$ est diagonalisable et nilpotent donc égal à 0

Proposition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{K}$. Alors M est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ l'est.

▷ Le sens direct est vérifié que χ_M soit scindé ou non.

▷ Supposons que $\exp M$ est diagonalisable.

On a alors $e^P(e^N - I_n) = 0$ car il s'agit de la partie nilpotente de e^M. Donc : $e^N = I_n$.

En notant q l'indice de nilpotence, on obtient : $\sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!} = 0$.

Donc :

$P(X) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{X^k}{k!}$ est un polynôme annulateur de N, d'où $X^q = \pi_N$ divise P — polynôme minimal de N

Ainsi, $q = 1$.

D'où : $N = 0$ i.e. $M = D$ diagonalisable.